Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение

средняя общеобразовательная школа №1 р.п. Лунино имени Артамонова Н.С.

НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

«СТАРТ В НАУКУ»

Секция: физика, математика, информатика.

«ОДНА ЗА ВСЕХ»
(Теорема Пика)

Подготовили:
Мельникова Диана Александровна
ученица 9 «Б» класса
МБОУ СОШ №1 р.п. Лунино
имени Артамонова Н.С.
Адрес образовательной организации:
442730 Пензенская область,
р.п. Лунино, ул. Мясникова, 42.
Домашний адрес:
442730 Пензенская область,
р.п. Лунино, ул. Юбилейная, 25-9
8(906)399-30-46.
Руководитель:
Красильникова Валентина Валентиновна
учитель математики
МБОУ СОШ №1 р.п. Лунино
имени Артамонова Н.С.
Адрес образовательной организации:
442730 Пензенская область,
р.п. Лунино, ул. Мясникова, 42.
8(84161)-3-13-09
luninoschool1@yandex.ru

2020

Содержание

Введение

«Математике должно учить еще с той целью, чтобы познания здесь приобретаемые, были достаточными для обыкновенных потребностей жизни».

Н.И.Лобачевский [1].

В 21 веке, некоторым детям, порой сложно запомнить огромное количество информации, поступающей каждый день в школе, и даже вызубренные формулы по математике, которые используются для нахождения площади различных фигур, будь то треугольник, параллелограмм или трапеция, часто забываются.

В интернете я нашла интересную статью про уникальную формулу Пика, которая используется для нахождения площади фигуры на клетчатой бумаге. Увидев такие задачи в контрольно – измерительных материалах ОГЭ и ЕГЭ, я решила исследовать задачи на клетчатой решётке, связанные с нахождением площади изображённой фигуры. Решения таких задач оригинальны, красивы и часто решаются проще и быстрее, чем аналитическим путем. Казалось бы, что увлекательного можно найти на клетчатой плоскости, то есть, на бесконечном листке бумаги, расчерченном на одинаковые квадратики? Оказывается, задачи, связанные с бумагой в клеточку, достаточно разнообразны.

Актуальность данной темы заключается в том, чтобы помочь выпускникам 9-ых и 11-х классов подготовиться к сдаче ОГЭ и ЕГЭ по математике.

А если учесть, что задачи на нахождение площади какого-либо объекта встречаются очень часто не только в математике, например: Какова площадь земельного участка, на котором Вы живете? Какую площадь занимает отдельно взятая страна? Какой океан по площади больше на карте? Сколько нужно приобрести семян для посева на определенном участке? Представьте себе ситуацию, что нет данных длины и ширины объекта и формулы площади, изученные в школьном курсе геометрии позабыты, а срочно нужно узнать площадь, ну хотя – бы примерно, на помощь может прийти формула Пика.

Объект исследования: задачи на клетчатой бумаге.

Предмет исследования: задачи на вычисление площади многоугольника на клетчатой бумаге, методы и приёмы их решения.

Методы исследования:

Теоретические: анализ и синтез.

Эмпирические: сравнение.

Индуктивный метод – получение выводов из конкретных примеров.

Эксперимент.

Гипотеза: Площадь фигуры, вычисленная по формуле Пика равна площади фигуры, вычисленной по формуле планиметрии.

Цель моей работы: доказательство универсальности формулы Пика при вычислении площадей многоугольников, изображённых на клетчатой решётке.

Для достижения поставленной цели предусматривается решение следующих **задач:**

1. Ознакомиться с информацией по теме исследования в интернет-источниках и печатных изданиях.
2. Выбрать главную и понятную информацию.
3. Отобрать материал для исследования

4. Применить формулу Пика при нахождении площадей различных объектов в исследуемых материалах.

5. Проанализировать и систематизировать полученную информацию.

6. Провести исследования по решению задач на вычисление площадей среди одноклассников и учащихся 11 класса

Краткий обзор используемой литературы и источников:

1.Георг Алекса́ндр Пик. Интернет – ресурс: https://ru.wikipedia.org/wiki.

Формула Пика. Интернет – ресурс: https://ru.wikipedia.org/wiki

3. Многоугольник. Интернет – ресурс:

https://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/6735

Из них я получила информацию о Георге Пике, его знаменитой формуле, разобралась с доказательством теоремы, подобрала материал для практических заданий.

Новизна моей работы заключается в сравнительном анализе применения известных школьных формул площади многоугольника и применения формулы Пика, а также исследовании по применению формулы Пика для нахождения площади произвольных многоугольников.

Глава I. Теоретическая часть.

1.1. Клетчатая решетка. Узлы.

При решении задач на клетчатой бумаге необходимы понятия решетки и узла. Клетчатая бумага (точнее — ее узлы), на которой мы часто предпочитаем рисовать и чертить, является одним из важнейших примеров точечной решетки на плоскости.

Рассмотрим на плоскости два семейства параллельных прямых, разбивающих плоскость на равные квадраты (Рисунок 1). Любой из этих квадратов называется фундаментальным квадратом или квадратом, порождающим решетку. Множество всех точек пересечения этих прямых называется точечной решеткой или просто решеткой, а сами точки – узлами решетки.

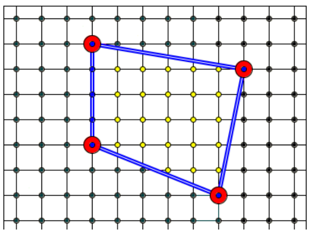


Рисунок 1.

Чтобы оценить площадь многоугольника на клетчатой решётке (Рисунок1), достаточно подсчитать, сколько клеток покрывает этот многоугольник (площадь клетки мы принимаем за единицу).

Площадь любого многоугольника, нарисованного на клетчатой бумаге, легко посчитать, представив её как сумму или разность площадей прямоугольных треугольников и прямоугольников, стороны которых идут по линиям сетки, проходящим через вершины нарисованного треугольника. Чтобы вычислить площадь многоугольника , изображенного на рисунке 2 , необходимо достроить его до прямоугольника ABCD, вычислить площадь прямоугольника ABCD, найти площадь

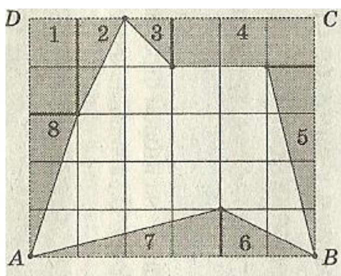


Рисунок 2.

заштрихованной фигуры как сумму площадей треугольников и прямоугольников её составляющих, вычесть её из площади прямоугольника. И хотя многоугольник и выглядит достаточно просто, для вычисления его площади нам придется потрудиться.

Вывод: не для любого многоугольника в геометрии есть формула для вычисления площади. И тогда приходится применять различные приёмы вычисления : разбивать, достраивать и т. д. процесс трудоёмкий и требует достаточного количества времени. Вот бы знать формулу, которая подошла бы для любого многоугольника, изображённого на клетчатой решётке!

1.2 Доказательство теоремы Пика.

Пусть В — число целочисленных точек внутри многоугольника, Г — количество целочисленных точек на его границе, S — его площадь. Тогда справедлива формула Пика:

$$S = В + Г / 2 - 1,$$

Пример для многоугольника на рисунке 3.

В=7 (красные точки), Г=8 (зелёные точки),

поэтому S = 7 + 8/2 - 1 = 10 квадратных единиц.

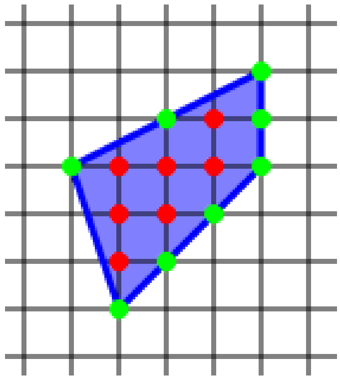


Рисунок 3

Докажем теорему Пика.

Для начала рассмотрим прямоугольник со сторонами, лежащими на линиях решетки. (Рисунок 4)

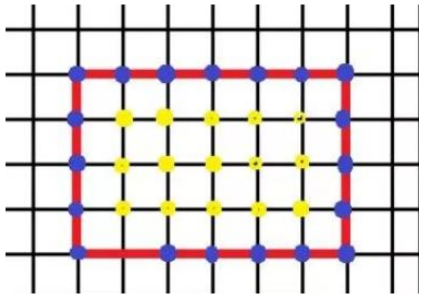


Рисунок 4

Пусть длины его сторон равны a и b.

Имеем в этом случае В = (a-1)(b-1), Г = 2a+2b. По формуле Пика

S = (a-1)(b-1)+a+b-1 = ab .

.

Рассмотрим теперь прямоугольный треугольник с катетами, лежащими на линиях решётки (рисунок 5). Такой треугольник получается из прямоугольника со сторонами a и b, рассмотренного в предыдущем случае, разрезанием его по диагонали. Пусть на диагонали лежат *c* целочисленных точек. Тогда для этого случая

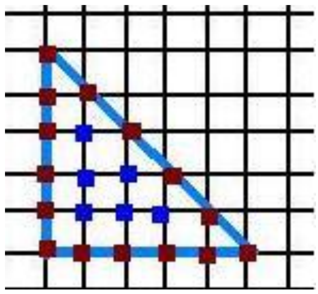
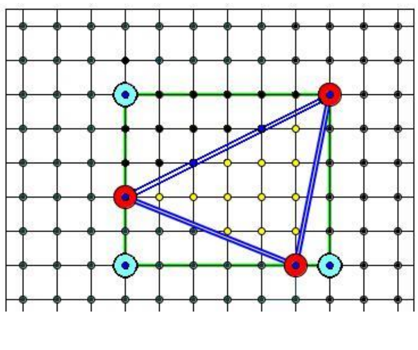


Рисунок 5.

В = ((a-1)(b-1)-c+2)/2, Г = (2a+2b)/2+c-1 и

получаем, что S = ab/2.



Теперь рассмотрим произвольный треугольник (рисунок 6.).

Рисунок 6

Его можно получить, отрезав от прямоугольника несколько прямоугольных треугольников. Поскольку и для прямоугольника, и для прямоугольного треугольника формула Пика верна, мы получаем, что она будет справедлива и для произвольного треугольника.

Остается сделать последний шаг: перейти от треугольников к многоугольникам.

Любой многоугольник можно триангулировать[1]. Отсюда по индукции следует, что формула Пика верна для любого многоугольника.

Правда есть одно важное замечание: формула справедлива только для многоугольников, у которых вершины расположены в узлах решетки. [3]

Вывод: Формула Пика – универсальная формула для вычисления площадей любых многоугольников изображённых на клетчатой решётке, правда, если их вершины расположены в узлах решётки.

1.3 Немного истории.

Георг Александр Пик (10.09.1859–13.07.1942) - австрийский математик. Родился Георг Пик в еврейской семье. Его отец Адольф Йозеф Пик возглавлял частный институт. До одиннадцати лет Георг получал образование дома (с ним занимался отец), а затем поступил сразу в четвёртый класс гимназии. В шестнадцать лет Пик сдал выпускные экзамены и поступил в университет в Вене. Уже в следующем году Пик опубликовал свою первую работу по математике.

После окончания университета в 1879 г. он получил право преподавать математику и физику. В 1880 г. Пик защитил докторскую диссертацию, а в 1881 г. получил место ассистента на кафедре физики Пражского университета. В 1888 г. он был назначен экстраординарным профессором математики, затем в 1892 году в Немецком университете в Праге —

[1] Триангулировать, т.е. разбить на треугольники (например, диагоналями).

ординарным профессором (полным профессором). В 1900–1901 гг. занимал пост декана философского факультета. В 1910 году Георг Пик был членом комитета, созданного Немецким университетом для рассмотрения вопроса о принятии в университет на должность профессора Альберта Эйнштейна, с которым Пик впоследствии подружился.

Пик и Эйнштейн имели не только общие научные интересы, но и увлекались музыкой. В 1927 году Георг Пик вышел в отставку. В 1928 году он был избран членом-корреспондентом Чешской академии наук и искусств, но в 1939 году, когда нацисты заняли Прагу, был исключён из академии. В июле 1942 года, в возрасте 82 лет, Георг Пик был депортирован нацистами в лагерь Терезиенштадт[2], где вскоре умер. Круг математических интересов Георга Пика был чрезвычайно широк: 67 его работ посвящены многим темам, таким как линейная алгебра, интегральное исчисление, функциональный анализ, геометрия и др. Но больше всего он известен своей теоремой о вычислении площади многоугольника, которая появилась в его восьмистраничной работе 1899 года. Эта теорема оставалась незамеченной в течение некоторого времени после того, как Пик её опубликовал, однако в 1949 г. польский математик Гуго Штейнгауз включил теорему (или как её ещё называют - формулу) в свой знаменитый «Математический калейдоскоп». С этого времени теорема Пика стала широко известна. В Германии формула Пика включена в школьные учебники. [2]

Вывод: Георг Пика выдающийся человек, с интересной судьбой. Его работы в области математики имели большое значение для развития этой науки.

Работая над теоретической частью моей темы я узнала о выдающемся математике, чьим именем названа формула. Формула Пика безусловно поможет в вычислении площадей фигур изображённых на клетчатой решётке. Доказательство теоремы Пика показало, что её можно применять

[2] Терезиенштадт (нем. Theresienstadt, Терезинское гетто) — нацистский концентрационный лагерь, располагавшийся на территории бывшего гарнизонного города Терезин в Чехии, на берегу реки Огрже.

для вычисления площадей любых многоугольников изображённых на клетчатой решётке с вершинами находящимися в узлах.

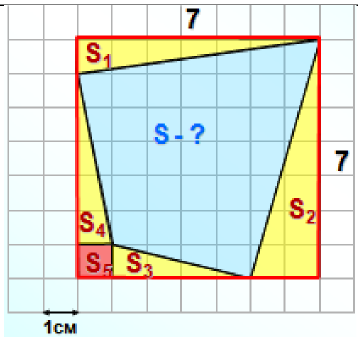
Глава II. Практическая часть.

2.1.Исследование площадей многоугольников изображённых на клетчатой решётке.

Для исследования я подобрала несколько заданий на вычисление площадей многоугольников, изображённых на клетчатой решётке.[4]

Я вычислила площади этих многоугольников с помощью формул планиметрии и формулы Пика. Полученные результаты сравнила.(Таблица 1)

Таблица 1

1)На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см х 1 см изображен четырех угольник. Найдите его площадь в квадратных сантиметрах		
Рисунок	По формулам геометрии	По формуле Пика
	$S_1=\frac{1}{2}a\cdot b=1/2\cdot 7\cdot 1=3{,}5$ $S_2=\frac{1}{2}a\cdot b=1/2\cdot 7\cdot 2=7$ $S_3=\frac{1}{2}a\cdot b=1/2\cdot 4\cdot 1=2$ $S_4=\frac{1}{2}a\cdot b=1/2\cdot 5\cdot 1=2{,}5$ $S_5=a^2=1^2=1$ $S_{кв.}=a^2=7^2=49$ $S=49-3{,}5-7-2-2{,}5-1=33$см^2	$S=\text{В}+\frac{\Gamma}{2}-1$ Г=4; В=32. $S=32+\frac{4}{2}-1=33$см^2
2)На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см х 1 см изображен четырех угольник. Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.		
Рисунок	По формулам геометрии	По формуле Пика

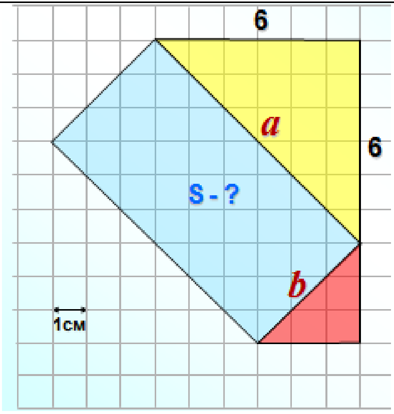
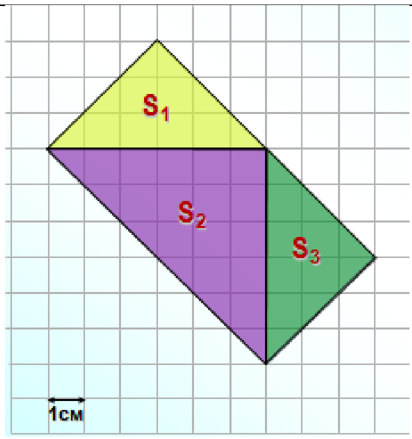
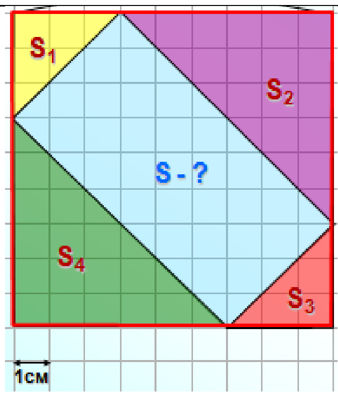
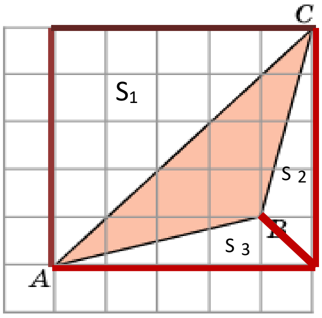
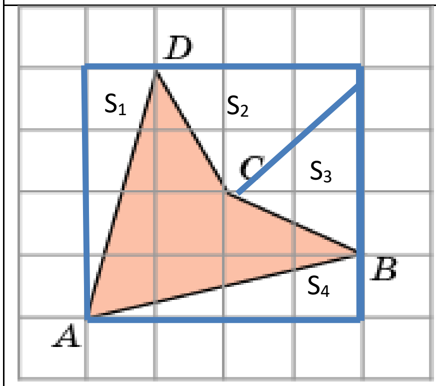
<table>
<tr><td>
</td><td>S=$a\cdot b$
$a = \sqrt{36+36} = 6\sqrt{2}$
$b = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$
S=$6\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}$ =36 см^2</td><td>$S = В + \frac{Г}{2} - 1$
Г=18, В=28
S=28+$\frac{18}{2}$-1=36см^2</td></tr>
<tr><td colspan="3">3)На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см х 1 см изображен четырех угольник. Найдите его площадь в квадратных сантиметрах</td></tr>
<tr><td>Рисунок</td><td>По формулам геометрии</td><td>По формуле Пика</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$S_1=\frac{1}{2}a\cdot b$=1/2·3·6=9
$S_2=\frac{1}{2}a\cdot b$=1/2·6·6=18
$S_3=\frac{1}{2}a\cdot b$=1/2·3·6=9
S=9+18+9=36 см^2</td><td>$S = В + \frac{Г}{2} - 1$
Г=18; В=28.
S=28+$\frac{18}{2}$-1=36см^2</td></tr>
<tr><td colspan="3">4)На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см х 1 см изображен четырех угольник. Найдите его площадь в квадратных сантиметрах</td></tr>
<tr><td>Рисунок</td><td>По формулам геометрии</td><td>По формуле Пика</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$S_1=\frac{1}{2}a\cdot b$=1/2·3·3=4,5
$S_2=\frac{1}{2}a\cdot b$=1/2·6·6=18
$S_3=\frac{1}{2}a\cdot b$=1/2·3·3=4,5
$S_4=\frac{1}{2}a\cdot b$=1/2·6·6=18
Sкв.=9^2=81см^2
S=81-4,5-18-4,5-18=36см^2</td><td>$S = В + \frac{Г}{2} - 1$
Г=18; В=28.
S=28+$\frac{18}{2}$-1=36см^2</td></tr>
<tr><td colspan="3">5.Найдите площадь треугольника ABC, считая стороны квадратных клеток равными 1.</td></tr>
</table>

Рисунок	По формулам геометрии	По формуле Пика
	$S_1=\frac{1}{2}a\cdot b=1/2\cdot 5\cdot 5=12{,}5$ $S_2=\frac{1}{2}a\cdot h=1/2\cdot 5\cdot 1=2{,}5$ $S_3=\frac{1}{2}a\cdot h=1/2\cdot 5\cdot 1=2{,}5$ $S_{кв.}=5^2=25$ $S=25-12{,}5-2{,}5-2{,}5=7{,}5$	$S = В + \frac{Г}{2} - 1$ В=5 Г=7 $S=5+\frac{7}{2}-1=7{,}5$
6. Найдите площадь четырехугольника ABCD, считая стороны квадратных клеток равными 1.		
Рисунок	По формулам геометрии	По формуле Пика
	$S_1=\frac{1}{2}a\cdot b=1/2\cdot 4\cdot 1=2$ $S_2=\frac{1}{2}a\cdot h=1/2\cdot 3\cdot 2=3$ $S_3=\frac{1}{2}a\cdot h=1/2\cdot 3\cdot 2=3$ $S_4=\frac{1}{2}a\cdot b=1/2\cdot 4\cdot 1=2$ $S_{кв.}=4^2=16$ $S=16-2-3-3-2=6$	$S = В + \frac{Г}{2} - 1$ В=5 Г=4 $S=5+\frac{4}{2}-1=6$

Вывод: Таким образом, рассмотрев задачи на нахождение площадей многоугольников, изображенных на клетчатой бумаге, по формулам геометрии и по формуле Пика , сравнив полученные результаты , я показала справедливость формулы Пика и пришла к выводу, что площадь фигуры, вычисленная по формуле Пика равна площади фигуры, вычисленной по формуле геометрии. Моя гипотеза оказалась верной.

2.2. Эксперимент, проведённый в 9-х и 11 классе.

Вычислять площади фигур изображённых на клетчатой решётке по формуле Пика, оказалось очень быстро и удобно. Я заметила, что на решение задач с применением формулы Пика у меня уходило меньше времени. Я решила познакомить с этой замечательной формулой своих одноклассников и учащихся 11 класса, в надежде на то, что возможно кому-то она пригодится при сдаче ОГЭ и ЕГЭ.

В эксперименте приняли участие 20 учащихся 9 класса и 10 учащихся 11 класса.

Я предложила учащимся им решить ряд задач на вычисление площадей фигур, изображённых на клетчатой решётке. (Приложение 1)

Поставила перед ними проблему: «Как вычислить площадь данных многоугольников»?

Все предложенные решения заключались в том, чтобы достроить его до прямоугольника и найти площадь фигуры, используя вычитание из площади прямоугольника площади прямоугольных треугольников или разбить на фигуры, площади которых можно найти по известным формулам и сложить найденные величины.

Я предложила учащимся 9 и 11 классов решить 5 задач на вычисление площадей фигур, изображённых на клетчатой решётке, и при этом попросила фиксировать время, затраченное на решение каждой задачи. Когда задание было выполнено, я задала вопрос: «Существует ли формула, по которой можно сразу найти площадь данного многоугольника?». Ответ был отрицательным. Тогда я рассказала им о формуле Пика, о которой никто из них не знал, и предложила решить те же задания по новой формуле.

Результаты испытаний приведены в таблице 2 (для 9-х классов) и таблице 3 (для 11 классов).

Таблица 2. Сравнительный анализ верно выполненных заданий и времени, затраченного на решение задач учащимися 9 класса

	1	2	3	4	5
Верно решили по формулам геометрии	12	13	10	7	9
Верно решили по формуле Пика	18	18	18	17	17
Среднее время, затраченное на решение по формулам геометрии	4мин 5сек	2мин 42сек	4мин	4мин50сек	3мин30сек
Среднее время, затраченное на решение по формуле Пика	2мин20сек	1мин15сек	2мин 3сек	1мин58сек	1мин20сек

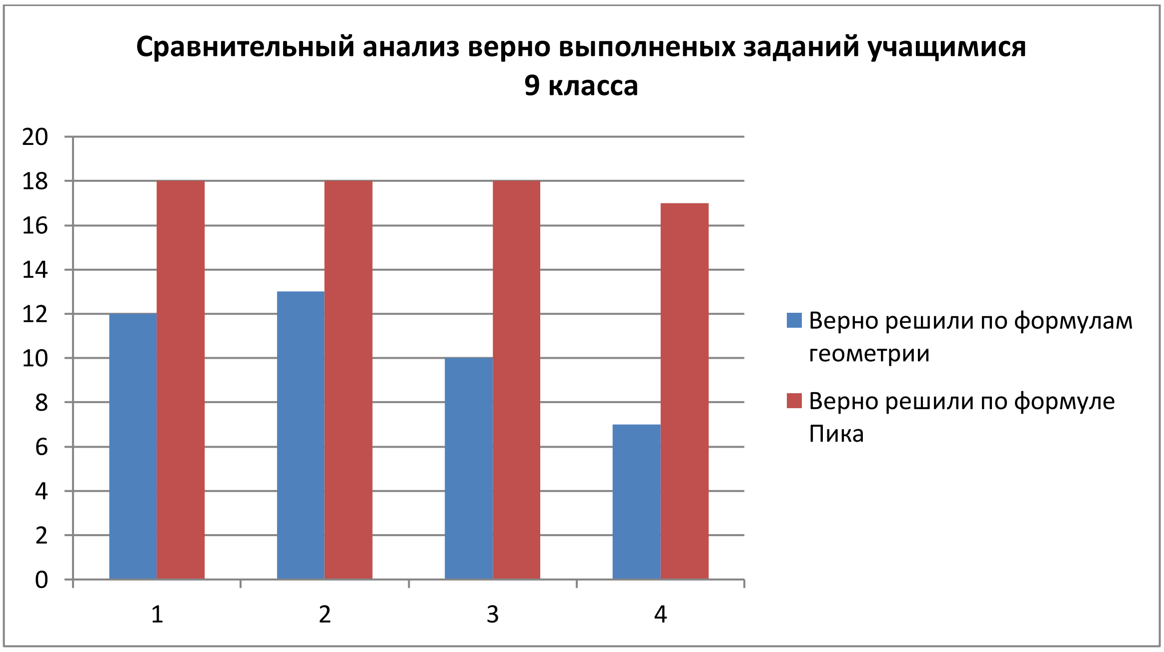
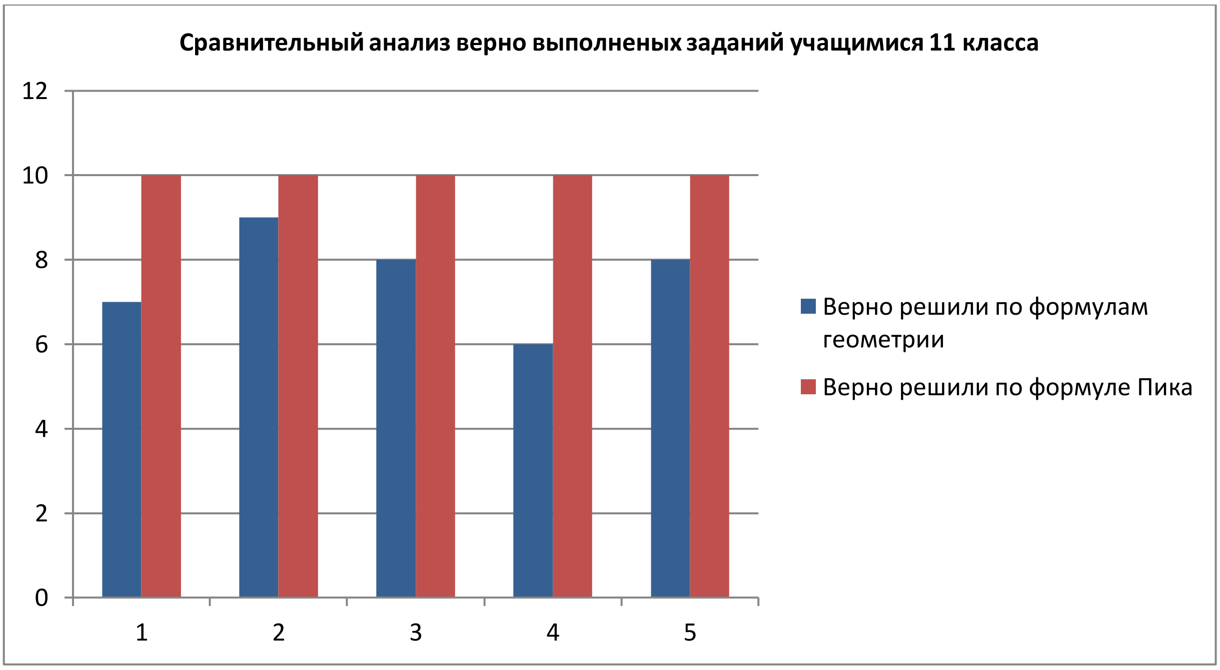


Таблица 3. Сравнительный анализ верно выполненных заданий и времени, затраченного на решение задач учащимися 11 класса.

	1	2	3	4	5
Верно решили по формулам геометрии	7	9	8	6	8
Верно решили по формуле Пика	10	10	10	10	10
Среднее время, затраченное на решение по формулам геометрии	3мин 51сек	2мин15сек	3мин42сек	3мин58сек	2мин30сек
Среднее время, затраченное на решение по формуле Пика	1мин8сек	1мин7сек	1мин 53сек	1мин36сек	57сек



Проанализировав полученные результаты, я сделала следующие **выводы**: формула Пика может оказать хорошую помощь при решении задач на вычисление площадей фигур, изображённых на клетчатой решётке; она легка для запоминания; решение задач с применением формулы Пика требует меньше времени.

Формула Пика очень проста для запоминания. Формула Пика очень удобна и проста в применении.

Многоугольник, площадь которого необходимо вычислить, может быть любой, даже самой причудливой формы.

Для закрепления формулы Пика я предложила ребятам подборку задач на вычисление площадей на клеточной решётке. (Приложение 2.)

Заключение

В процессе исследования я использовала Интернет-ресурсы. Узнала, что задача на нахождение площади многоугольника с вершинами в узлах сетки сподвигла австрийского математика Пика в 1899 году доказать замечательную формулу, названную его именем.

В результате работы я расширила свои знания о решении задач на клетчатой бумаге, определила для себя классификацию исследуемых задач, убедились в их многообразии. Познакомилась с формулой Пика, которая имеет ряд преимуществ перед другими способами вычисления площадей многоугольников на клетчатой бумаге:

Для вычисления площади многоугольника, нужно знать всего одну формулу: $S = Г : 2 + В - 1$.

Я научилась вычислять площади многоугольников, изображенных на клетчатой решётке используя эту формулу. Познакомила своих одноклассников и учащихся 11 класса с замечательной формулой, которая, надеюсь, многим пригодится при сдаче Государственной итоговой аттестации.

Список использованных источников и литературы.

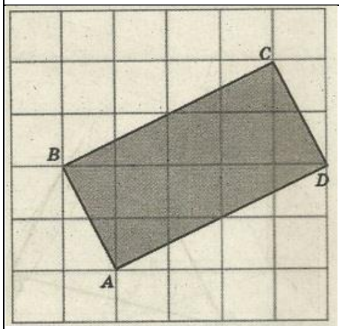
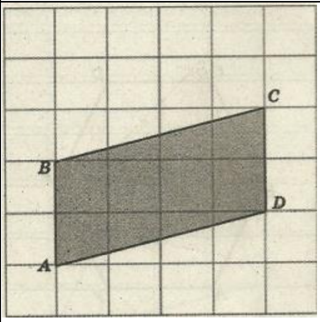
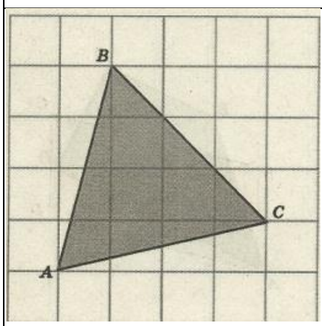
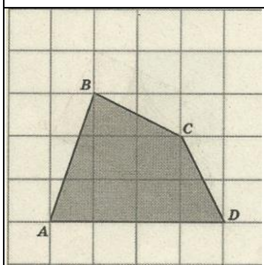
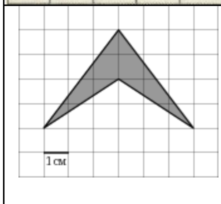
1. Высказывания о математике. Н.И.Лобачевский. Интернет – ресурс: http://math-school.narod.ru/quotes_from_great_men_of_mathematics

2. Георг Алекса́ндр Пик. Интернет – ресурс: https://ru.wikipedia.org/wiki3. 3.

3.Георг Алекса́ндр Пик. Интернет – ресурс: http://ru.knowledgr.com/00753441

4. https://oge.sdamgia.ru/

Приложение 1.

Задание	**Геометрический способ**		**По формуле Пика**	
	Решение	*время*	*Решение*	*Время*
 Задание 1				
 Задание 2				
 Задание 3				
				
 Задание 5				

Приложение 2.

Задачи – рисунки, для которых применима формула Пика. ЕГЭ по математике.

Сайт «Решу ЕГЭ». (№ 27543 – 27671)

Найти площадь изображенного на рисунке многоугольника: